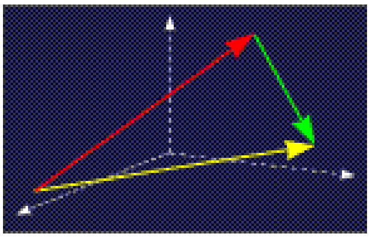
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



# Rede- und Schreibweisen über Funktionen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum stellt einige im Zusammenhang mit Funktionen wichtige Begriffe und ihre korrekte Verwendung vor.

## 1 Definition von Funktionen

Um eine **Funktion** (**Abbildung**) zu definieren, benötigen wir zwei Mengen $A$ und $B$ sowie eine Vorschrift $f$, die jedem Element von $A$ ein Element von $B$ zuordnet. Wir schreiben dann

$$f : A \rightarrow B \tag{1.1}$$

und müssen dazu die konkrete Zuordnungsvorschrift, d.h. die Festlegung, wie $f$ auf Elemente von $A$ „wirkt“, angeben. Für jedes $x \in A$ bezeichnen wir mit $f(x)$ jenes Element von $B$, auf das $x$ abgebildet wird.

Hier ein konkretes Beispiel: Es sei $A = \mathbb{R}^*$ (d.h. die Menge der von $0$ verschiedenen reellen Zahlen) und $B = \mathbb{R}$ (d.h. die Menge aller reellen Zahlen). Nun definieren wir eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.2}$$

durch die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{3\,x - 1}{x} \tag{1.3}$$

bzw. in einer anderen Schreibweise

$$x \mapsto \frac{3\,x - 1}{x} \qquad \text{oder} \qquad f : x \mapsto \frac{3\,x - 1}{x}\,. \tag{1.4}$$

Eine dritte Möglichkeit, dieselbe Zuordnungsvorschrift festzulegen, wäre die folgende „Wortformel“:

> „Man wähle eine von $0$ verschiedene reelle Zahl, multipliziere sie mit $3$, subtrahiere $1$ und dividiere das Ergebnis durch ebenjene gewählte Zahl.“

Sie sehen, es kommt nicht auf die Art und Weise an, *wie* die Zuordnungsvorschrift beschrieben wird – wichtig ist nur, dass sie für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ eindeutig ein $f(x) \in \mathbb{R}$ festlegt.

# 2 Sprachregelungen

Anhand der durch (1.2) und (1.3) bzw. (1.4) definierten Funktion $f$ stellen wir nun einige Bezeichnungen und Sprechweisen vor, die Sie kennen (und nicht miteinander verwechseln) sollten:

- $f$ ist der **Name** der Funktion[1].
- Die Menge $\mathbb{R}^*$ in der Rolle, die sie in (1.2) spielt, heißt **Definitionsmenge** (oder **Definitionsbereich**) der Funktion $f$.
- Die Menge $\mathbb{R}$ in der Rolle, die sie in (1.2) spielt, heißt **Zielmenge** der Funktion $f$.
- Der Platzhalter $x$ in (1.3) und (1.4) wird **Variable**[2] oder **Argument** genannt, ein konkreter Wert von $x$ heißt **Stelle**, manchmal auch **Punkt**[3].
- $f(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ der zugehörige **Funktionswert**. Wie nennen ihn auch **Funktionswert an der Stelle** $x$. Bitte verwechseln Sie nicht $f(x)$ mit $f$!
- Der in (1.3) und (1.4) auftretende Term $\frac{3\,x-1}{x}$ heißt **Funktionsterm**. Aber Achtung: Er ist nicht eindeutig. Wird er durch den äquivalenten Term $3 - \frac{1}{x}$ ersetzt, so ergibt sich dieselbe Funktion!
- (1.3) heißt **Funktionsgleichung**. Auch sie ist nicht eindeutig! Wird (1.3) durch $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$ ersetzt, so ergibt sich dieselbe Funktion!
- Für die konkrete Wirkungsweise der Funktion $f$ gibt es viele sprachliche Ausdrucksformen, unter anderem:
  - $f$ wirkt auf $x$ in der durch (1.3) bzw. (1.4) angegebenen Weise.
  - $f$ ordnet jedem $x$ ein $f(x)$ zu.
  - $f$ auf $x$ angewandt ergibt $f(x)$.
  - $x$ wird durch $f$ (oder von $f$) auf $f(x)$ abgebildet.
- Die Menge aller Elemente von $\mathbb{R}$, die „von $f$ getroffen werden", d.h. die Funktionswert eines Elements von $\mathbb{R}^*$ sind, heißt **Bildmenge** (kurz **Bild**) oder **Wertemenge**[4] (**Wertebereich**) der Funktion $f$. Sie wird – in unserem Beispiel – kurz mit $f(\mathbb{R}^*)$ bezeichnet. Konkret ist $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, d.h. die Menge aller reellen Zahlen, die ungleich $3$ sind[5].

---

[1] Nicht $f(x)$, auch wenn Sie das vielleicht gelernt haben! Wenn man über eine Funktion spricht, sollte man also genau genommen sagen „Die Funktion $f$ ...", nicht „Die Funktion $f(x)$ ...", wie das vielfach üblich ist. Anstelle von „Die Funktion $f(x) = \frac{3\,x-1}{x}$ ..." könnte man etwa sagen "Die durch $f(x) = \frac{3\,x-1}{x}$ definierte Funktion $f$ ...". Man muss nicht päpstlicher als der Papst sein, aber man sollte zumindest wissen, was $f$ und was $f(x)$ bedeutet.

[2] Manchmal auch „unabhängige Variable", da $x$ innerhalb der Definitionsmenge frei gewählt werden kann.

[3] Die Bezeichnung „Punkt" rührt von der Identifizierung reeller Zahlen mit Punkten auf der Zahlengeraden her. Mit ihr sollte man aber vorsichtig umgehen, da „Punkt" im Zusammenhang mit Funktionen auch etwas anderes bedeutet, nämlich ein Paar $(x, f(x))$, interpretiert als Punkt in der Zeichenebene.

[4] Achtung: In manchen mathematischen Texten wird der Begriff „Wertemenge" in der Bedeutung von „Zielmenge" verwendet. Bei der Bezeichnung „Bildmenge" besteht diese Verwechslungsgefahr nicht.

[5] Was nichts anderes bedeutet, als dass die Gleichung $f(x) = c$ für $c \neq 3$ zumindest eine Lösung in $\mathbb{R}^*$ besitzt, für $c = 3$ aber keine.

- $f$ ist eine **reelle Funktion**, da sie von einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ (nämlich $\mathbb{R}^*$) in eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ (nämlich $\mathbb{R}$ selbst) abbildet. Fast alle Funktionen, die im Stoff des Mathematikunterrichts vorkommen, sind reelle Funktionen.

In fast allen bisher besprochenen Varianten, eine Funktion anzugeben, wurde ihr Name (in unserem Beispiel $f$) mit angeschrieben. Lediglich die Schreibweise

$$x \mapsto \frac{3\,x-1}{x} \tag{2.1}$$

(ausgesprochen als „$x$ wird abgebildet auf $\frac{3\,x-1}{x}$“) erlaubt es, eine Funktion nur durch einen Funktionsterm, also gewissermaßen „namenlos“ anzugeben. Dies wird in Technik und Naturwissenschaft häufig zu „die Funktion $\frac{3\,x-1}{x}$“ verkürzt. Genau genommen ist das nicht korrekt, da $\frac{3\,x-1}{x}$ einen Funktionsterm bezeichnet, nicht die Funktion als solche. Es handelt sich also nicht um eine „offizielle“ Sprachregelung, sondern um einen etwas laxen Sprachgebrauch.

# 3 Variablenbezeichnung

Während unsere Funktion den Namen $f$ hat, bei dem wir bleiben, solange wir es mit ihr zu tun haben, ist das Symbol, das für die Variable verwendet wird, beliebig und kann von einer Berechnung zur nächsten geändert werden! Anstelle von (1.3) könnte man genausogut

$$f(u) = \frac{3\,u-1}{u}\,, \tag{3.1}$$

und anstelle von (1.4) könnte man

$$z \mapsto \frac{3\,z-1}{z} \qquad \text{oder} \qquad f: \beta \mapsto \frac{3\,\beta-1}{\beta} \tag{3.2}$$

schreiben. Um dann etwa herauszufinden, an welcher Stelle der Funktionswert gleich $-1$ ist, kann man die Gleichung, die diese Frage darstellt, mit dem Variablennamen $w$ in der Form $f(w) = -1$, also

$$\frac{3\,w-1}{w} = -1 \tag{3.3}$$

anschreiben und lösen. (Lösen Sie sie zur Übung! Die einzige Lösung ist $\frac{1}{4}$.) Mit einem Wort: Man muss sich nicht auf eine fixe Bezeichnung für die Variable festlegen.

Manchmal kommt in Berechnungen ein Variablenwert vor, den man sich als fix festgehalten vorstellt (obwohl er nicht konkret angegeben ist), und gleichzeitig die Variable in ihrer Rolle, beliebige Werte im Definitionsbereich annehmen zu können. In diesen Fällen wird ersterer oft mit einem Index wie $_0$ oder $_1$ gekennzeichnet. So kann beispielsweise gefragt werden, wie sich der Funktionswert an einer „variablen“ Stelle $x$ vom Funktionswert an einer „festgehaltenen“ Stelle $x_0$ unterscheidet. Die Differenz der beiden Funktionswerte ist dann durch

$$f(x) - f(x_0) = \frac{3\,x-1}{x} - \frac{3\,x_0-1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \tag{3.4}$$

gegeben. (Überprüfen Sie zur Übung diese Rechnung!) Sie kann dann etwa zum Anlass genommen werden, um für jedes festgehaltene $x_0 \in \mathbb{R}^*$ eine neue Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ g(x) &= f(x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{3.5}$$

zu definieren. Beachten Sie die unterschiedlichen Rollen, die die Symbole $x$ und $x_0$ in (3.5) spielen!

Im Zusammenhang mit „variablen" und „festgehaltenen" Größen erwähnen wir noch die in Technik und Naturwissenschaft verbreitete Angewohnheit, die Funktionsschreibweise vom Typ „$f(x)$" zur Kennzeichnung unterschiedlichster Abhängigkeiten zu verwenden. Wir nehmen als Beispiel das Ohmsche Gesetz für Gleichstrom, das in der Form

$$I = \frac{U}{R} \tag{3.6}$$

geschrieben werden kann. Es besagt: Wird an einen Leiter mit Widerstand $R$ eine elektrische Spannung $U$ angelegt, so fließt durch diesen ein elektrischer Strom mit Stromstärke $I$, wobei $R$, $U$ und $I$ die Beziehung (3.6) erfüllen. Daher gibt es zwei Möglichkeiten, die Stromstärke $I$ in Abhängigkeit von einer der beiden anderen Größen bei festgehaltenem Wert der anderen aufzufassen:

- Wird in einer Versuchsanordnung mit bekanntem, gleichbleibendem Widerstand $R$ die Spannung $U$ variiert, so hängt die Stromstärke von $U$ ab. Das wird oft in der Form

  $$I(U) = \frac{U}{R} \tag{3.7}$$

  angeschrieben. Um lediglich anzugeben, dass $I$ in dieser Situation von $U$ abhängt, wird $I = I(U)$ geschrieben.

- Wird hingegen die angelegte Spannung $U$ auf einen fixen Wert geregelt und der Widerstand $R$ variiert, so hängt die Stromstärke von $R$ ab. Das wird dann oft in der Form

  $$I(R) = \frac{U}{R} \tag{3.8}$$

  angeschrieben. Um lediglich anzugeben, dass $I$ in dieser Situation von $R$ abhängt, wird $I = I(R)$ geschrieben.

Mit diesen Kennzeichnungen wird ausgedrückt, welche Abhängigkeit gerade von Interesse ist, also was als festgehalten und was als variabel betrachtet wird. Aber Achtung: Das Symbol $I$ stellt in (3.7) und (3.8) zwei *unterschiedliche* Funktionen dar[6]! (3.7) drückt eine Proportionalität aus, (3.8) eine umgekehrte Proportionalität.

[6] Genau genommen stellt (3.7) nicht *eine* Funktion dar, sondern für jeden vorgegebenen Wert von $R$ (der natürlich $\neq 0$ sein muss) eine, und auch (3.8) stellt nicht *eine* Funktion dar, sondern für jeden vorgegebenen Wert von $U$ eine!

# 4 Beispiel mit endlichen Mengen

Um einige der zuvor vorgestellten Begriffe zu illustrieren, betrachten wir als Beispiel eine Funktion, bei der die Definitionsmenge $A$ und die Zielmenge $B$ endliche Mengen sind, d.h. nur endlich viele Elemente haben.

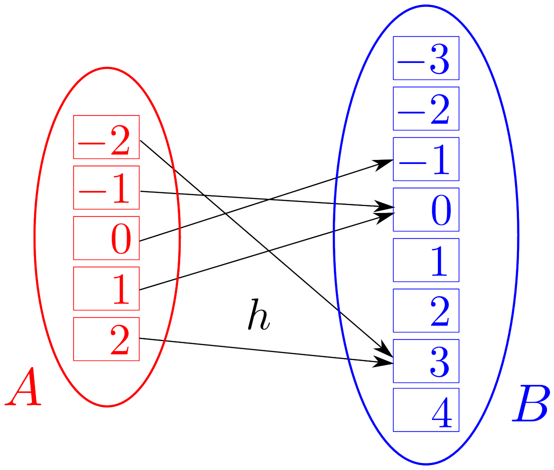



**Abbildung 1:** Beispiel einer Funktion $h : A \to B$, wobei $A$ und $B$ endliche Mengen sind. Jedem Element von $A$ wird ein Element von $B$ zugeordnet.

Abbildung 1 zeigt die Mengen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ sowie die Wirkung einer Funktion $h : A \to B$. Letztere kann, da die Menge $A$ endlich ist, durch eine Aufzählung aller Funktionswerte definiert werden:

$$h(-2) = 3 \tag{4.1}$$
$$h(-1) = 0 \tag{4.2}$$
$$h(0) = -1 \tag{4.3}$$
$$h(1) = 0 \tag{4.4}$$
$$h(2) = 3 \tag{4.5}$$

(4.1) könnten wir auch genausogut in der Form

$$h : -2 \mapsto 3 \tag{4.6}$$

anschreiben, (4.2) in der Form

$$h : -1 \mapsto 0, \tag{4.7}$$

usw.

Wie aus der Abbildung hervorgeht, wird *jedem* Element von $A$ ein Element von $B$ zugeordnet. Es wird aber nicht jedes Element von $B$ „getroffen". Die Bildmenge ist $h(A) = \{-1, 0, 3\}$. Zwei Elemente von $B$ (nämlich $0$ und $3$) werden jeweils zweimal „getroffen", das Element $-1$ nur einmal, alle anderen Elemente gar nicht. Anstelle der Darstellung in Abbildung 1 oder der Aufzählung (4.1) – (4.5) kann die Funktion $h$ auch durch eine Funktionsgleichung definiert werden:

$$h(n) = n^2 - 1 \tag{4.8}$$

(rechnen Sie nach!), wobei wir die Variable hier mit $n$ bezeichnet haben. (Wir hätten aber auch jeden anderen Buchstaben verwenden können.) Der Funktionsterm ist $n^2 - 1$.

Auch in diesem einfachen Fall können wir von Gleichungen sprechen, wenn Funktionswerte vorgegeben werden:

- Die Gleichung $h(n) = 3$ besitzt zwei Lösungen (nämlich $-2$ und $2$),
- die Gleichung $h(n) = -1$ besitzt nur eine Lösung (nämlich $0$),
- und die Gleichung $h(n) = 2$ besitzt überhaupt keine Lösung.

Auch einige andere Begriffe, die im Zusammenhang mit Funktionen eine wichtige Rolle spielen, können anhand dieses einfachen Beispiels verdeutlicht werden:

- Da $h(-1) = 0$ und $h(1) = 0$ gilt, werden $-1$ und $1$ **Nullstellen** der Funktion $h$ genannt.
- Der größte angenommene Funktionswert ist $3$. Er wird an den Stellen $-2$ und $2$ angenommen. Diese beiden Stellen heißen daher **Maximumstellen** von $h$.
- Der kleinste angenommene Funktionswert ist $-1$. Er wird an der Stelle $0$ angenommen. Die Stelle $0$ heißt daher **Minimumstelle** von $h$.

Alle diese Begriffe werden mit entsprechend übertragenen Bedeutungen ganz allgemein für reelle Funktionen verwendet, insbesondere auch für solche, bei denen $A$ und $B$ keine endlichen Mengen sind.

---

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.